Universidade do Minho

Mestrado / Curso de Especialização em Engenharia Industrial

Investigação Operacional

Exercícios de Programação Linear e Inteira

Filipe Pereira e Alvelos
Departamento de Produção e Sistemas
Universidade do Minho

Versão 02: 20 de Outubro de 2005

Os dados de alguns enunciados encontram-se em ficheiro anexo: exercicios_mei_io_pli_dados.xls.

ÍNDICE

1 Produção (1)

Uma determinada empresa produz dois produtos (*A,B*) com base em cinco componentes (*a, b, c*). Cada unidade do produto *A* é composta por *2* unidades de *a* e uma unidade *b*; cada unidade do produto *B* é composta por *2* unidades de *a* e uma unidade de *c*. Para o período em causa estão disponíveis *12* unidades do componente *a*, *3* do *b* e *4* do *c*.

Ambos os produtos têm de ser processados em duas máquinas (*M1, M2).* O tempo de processamento (em horas por unidade processada), a capacidade das máquinas (em horas) e o lucro obtido (em unidades monetárias por unidade produzida) são dados na tabela.

O número total de unidades produzidas não pode ser inferior a *2*. Pretende-se determinar as quantidades a produzir de cada um dos produtos de forma a maximizar o lucro total.

Tempo de processamentos (horas/unidade)	*A*	*B*	Capacidade da máquina (horas)
M1	*3*	*2*	*12*
M2	*2*	*4*	*16*
Lucro do produto (U.M./unidade)	*6*	*3*	

Considere as alíneas seguintes de forma independente.

Excepto quando referido explicitamente considere que podem ser fabricadas quantidades fraccionárias dos produtos.Formule um modelo de Programação Linear para este problema.

a)

i) Represente graficamente o modelo de PL.

ii) Obtenha uma solução óptima através da representação gráfica.

iii) Indique uma função objectivo para a qual a única solução óptima corresponda a produzirem-se *2* unidades de *A* e *3* unidades de B.

iv) Identifique as restrições redundantes do modelo de PL.

v) Se fosse possível aumentar a capacidade de uma máquina, qual escolheria? Se fosse possível aumentar a disponibilidade de um componente, qual escolheria?

vi) Obtenha a solução óptima para este problema através de *software* adequado. Interprete todos os valores de análise de sensibilidade por ele fornecido, relacionando-os com a representação gráfica do problema.

b)

Altere o modelo da alínea anterior de forma a contemplar cada uma das seguintes situações, obtendo uma solução óptima através da utilização de *software*.

i) Por cada unidade de cada componente não utilizado existe um custo de *1* U.M. que corresponde a essa unidade ter de ficar armazenada.

ii) Componentes adicionais podem ser adquiridos a um custo unitário de *1* U.M..

iii) Pretende-se que a produção de *A* corresponde a, pelo menos, *80%* da produção total.

c)

A empresa estuda a possibilidade fabricar um novo produto (*C*). Estima-se o seu lucro unitário em *10* U.M.. O produto é fabricado com base em uma unidade de cada um dos componentes (*a*, *b* e *c*). O processo produtivo de C implica que, para além do tempo de processamento de uma hora em cada uma das máquinas (por unidade fabricada) seja necessário processamento adicional que pode ser efectuado em qualquer das máquinas. Se este processamento adicional for efectuado na máquina 1, demora uma hora, se for efectuado na máquina 2 demora duas horas.

i) Apresente um modelo de PL para este problema e obtenha a uma solução óptima através da utilização de *software*.

ii) Quanto tempo vão estar paradas as máquinas?

iii) Com base na análise de sensibilidade dada pelo *software*, caso fosse possível obter mais uma unidade de um componente, qual escolheria?

d)

Considere que as quantidades produzidas têm de ser inteiras.

i) Obtenha uma solução óptima através da utilização de *software*.

ii) Através da representação gráfica confirme que a solução é óptima e indique uma solução óptima alternativa.

iii) Indique uma restrição cuja inclusão no modelo implicaria que a solução óptima da relaxação linear seria óptima para o problema inteiro.

e)

Considere agora que o fabrico de cada um dos produtos implica a preparação das máquinas. Os tempos de preparação são dados na tabela seguinte.

Tempo de preparação (horas)	*A*	*B*
M1	*1*	*0.8*
M2	*0.4*	*0.3*

i) Apresente um modelo de Programação Inteira para o problema.

ii) Obtenha uma solução óptima através da utilização de *software*.

2 Modelo geral (1)

Considere um problema de Programação Linear cuja região das soluções admissíveis é definida por:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 \leq 4$$
$$x_1 , x_2 \geq 0.$$

a) Represente graficamente a região das soluções admissíveis no espaço (x_1,x_2).

b) Identifique todos os pontos extremos, as bases que lhes estão associadas e as correspondentes soluções básicas.

c) Indique, para cada ponto extremo, uma função objectivo que implique que o ponto extremo em questão é a única solução óptima do problema.

d) Indique uma função objectivo que implique a existência de soluções óptimas alternativas.

e) Indique uma base não admissível.

3 Modelos gerais (2)

Resolva, utilizando o algoritmo Simplex e confirmando graficamente (quando possível) o resultado obtido, cada um dos problemas seguintes.

a)

$$Max\ z = x_1 + 2x_2$$
$$s.a:$$
$$-4x_1 + x_2 \leq 4$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

b)

$$Max\ z = 2x_1 + x_2$$
$$s.a:$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 - 3x_2 \geq 3$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

c)

$$Min\ z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$s.a:$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 120$$

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0$$

d)

$$Max\ z = 8x_1 + 5x_2$$
$s.a:$
$$2x_1 + x_2 \leq 500$$
$$x_1 \leq 150$$
$$x_2 \leq 250$$
$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

e)

$$Max\ z = 8\ x_1 + 5\ x_2$$
$s.a:$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

---

4 Modelo geral (3)

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$
$s.a:$
$$x_1 - x_2 \geq 1$$
$$x_1 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Determine uma solução óptima, efectuando primeiro uma iteração do algoritmo simplex dual e prosseguindo com o algoritmo simplex primal.

5 Análise de sensibilidade geral (1)

Considere a seguinte formulação de um problema de Programação Linear.

Max $z = 20x_1 + 40x_2$
s.a:
$4\,x_1 + 8\,x_2 \leq 200$
$5\,x_1 + 5/2\,x_2 \leq 250$
$6\,x_1 + 3\,x_2 \leq 220$
$x_1, x_2 \geq 0$

Na resolução deste problema através do *Solver* do *Excel*, obteve-se o seguinte relatório de análise de sensibilidade.

Adjustable Cells

Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
x1	0	0	20	0	1E+30
x2	25	0	40	1E+30	0

Constraints

Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
r1	200	5	200	386.6666667	200
r2	62.5	0	250	1E+30	187.5
r3	75	0	220	1E+30	145

Indique os valores assinalados com '?' no seguinte quadro simplex óptimo.

	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	
x_2	$1/2$	?	$1/8$	?	?	?
f_2	$15/4$	?	$-5/16$	?	?	?
f_3	$9/2$	?	$-3/8$	?	?	?
z	?	?	?	?	?	?

6 Análise de sensibilidade geral (2)

Considere um problema de Programação Linear de maximização em que se consideram 4 actividades e 5 recursos limitados.

Na tabela seguinte são dados os consumos unitários de cada recurso (R1 a R5) por actividade (A1 a A4), a disponibilidade de cada recurso (coluna RHS) e o lucro unitário de cada actividade (linha Lucro).

	A1	A2	A3	A4	RHS
R1	1	1		4	8
R2	2	4	1		8
R3	4	1		4	16
R4			2	1	4
R5		2	2	1	4
Lucro	1	4	2	2	

a) Formule o problema como um modelo de Programação Linear.

b) Com auxílio de software, obtenha uma solução óptima.

c) No software que utilizou na alínea anterior, aceda ao(s) relatório(s)/janela(s) relativos a análise de sensibilidade. Interprete todos os valores que lhe são apresentados.

d) Preencha no seguinte quadro simplex (onde os índices das variáveis *x* têm uma correspondência directa com as actividades e os das variáveis *s* com os recursos) as células assinaladas com "?".

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
?										?
?										?
?										?
?										?
?										?
	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

e) Dos cenários a seguir descritos, qual o mais favorável em termos de maximização de lucro? Tente reoptimizar o problema (com auxílio de *software*) apenas para os cenários em que não seja claro se são favoráveis ou não.

i) Aumento de 25% na disponibilidade de R2, aumento de 25% na disponibilidade de R5 e diminuição de 25% do lucro unitário de A2.

ii) Aumento de 50% na disponibilidade de R3, aumento de 50% na disponibilidade de R4 e diminuição de 25% na disponibilidade de R1.

iii) Aumento de 50% na disponibilidade de R1.

iv) Aumento de 100% no lucro de A1 e diminuição de 25% nos lucros de A2, A3 e A4.

f) Sem recorrer a alterações de parâmetros no modelo (logo sem fazer reoptimizações), indique:

i) Qual o valor da função objectivo (numa solução óptima) se a disponibilidade do recurso R5 for de 5.5?

ii) O recurso R3 não está a ser utilizado na sua totalidade. A partir de que percentagem de diminuição da sua disponibilidade tal deixa de acontecer?

iii) A partir de que valor do lucro unitário da actividade A3, x_3 deixa de ter um valor nulo?

7 Política de vacinação

Os responsáveis pela política de vacinas por uma determinada região deparam-se com o problema de minimizar o valor monetário dispendido com a aquisição e transporte das vacinas para os Centros de Saúde onde serão administradas.

O número de vacinas necessário em cada um dos 4 Centros de Saúde da referida região é de 20 000, 50 000, 30 000 e 40 000.

Existem três empresas farmacêuticas capazes de fornecer vacinas no prazo estipulado, tendo cada uma feito uma proposta.

A empresa A coloca em cada Centro de Saúde as vacinas que forem precisas a um preço de 0.5€ por vacina.

A empresa B vende cada vacina por 0.2€ mas não se responsabiliza pelo seu transporte para os Centros de Saúde. Esta empresa não assegura mais de 100 000 vacinas. Estima-se o custo de transporte por vacina das instalações da empresa B para cada um dos Centros de Saúde em 0.15€, 0.2€, 0.35€ e 0.4€ (pela ordem em que foram inicialmente referenciados).

A empresa C garante a entrega das vacinas aos Centros de Saúde 1, 2 e 3 pelos preços de 0.2€, 0.4€ e 0.3€.

Formule este problema através de um modelo de transportes.

8 Carregamento de avião

Um avião tem três compartimentos (Frente – F, Meio – M, Trás – T) dedicados ao transporte de carga. O peso e o volume a serem transportados em cada compartimento não podem exceder os valores dados na seguinte tabela.

Compartimento	Peso máximo (toneladas)	Volume máximo (m^3)
F	10	6800
M	16	8700
T	8	5300

De forma a ser mantido o equilíbrio do avião, a proporção entre o peso da carga efectivamente transportada em cada compartimento e o peso máximo do compartimento deverá ser igual para os três compartimentos.

Existem quatro cargas (A, B, C e D) a transportar no próximo voo. As suas características são dadas na tabela seguinte.

Carga	Peso (toneladas)	Volume (m^3/tonelada)	Lucro (€/tonelada)
A	18	480	310
B	15	650	380
C	23	580	350
D	12	390	285

Qualquer fracção de qualquer uma das cargas pode ser colocada em qualquer compartimento.

Formule um modelo de Programação Linear que lhe permita determinar qual a quantidade de cada carga que deve ser transportada em cada um dos compartimentos de forma a maximizar o lucro total.

9 Realocação de alunos

Foi decidido que, no próximo ano lectivo, uma determinada Escola do Ensino Secundário, deveria ser encerrada. Dessa forma, os alunos actualmente a estudar nessa Escola, terão de passar a estudar em uma de três outras escolas.

Dado o transtorno provocado, foi decidido que, para os alunos em questão, seria providenciado o transporte entre a sua área de residência e a sua nova escola. Consideraram-se seis áreas de residência.

Na tabela seguinte, apresentam-se alguns dados referentes a esta situação.

Área	Número de alunos	Custo de transporte por estudante (€)		
		Escola 1	Escola 2	Escola 3
1	450	300	0	700
2	600	–	400	500
3	550	600	300	200
4	350	200	500	–
5	500	0	–	400
6	450	500	300	0
Capacidade da escola		900	1100	1000

Apresente um modelo de Programação Linear para este problema, tendo em conta que se pretende o menor custo total possível.

10 Simplex para Transportes (1)

Considere um seguinte problema de transportes com três origens (O1, O2 e O3) e três destinos (D1, D2 e D3). A oferta de cada uma das origens é de 15 unidades e as procuras de cada um dos destinos é de 10 unidades.

Nas duas tabelas seguintes apresentam-se os custos unitários de transporte entre cada origem e cada destino e uma solução admissível para o problema em causa.

Custos unitários	D1	D2	D3
O1	7	4	3
O2	3	1	7
O3	1	6	1

Solução	D1	D2	D3
O1	0	0	5
O2	0	10	0
O3	10	0	5

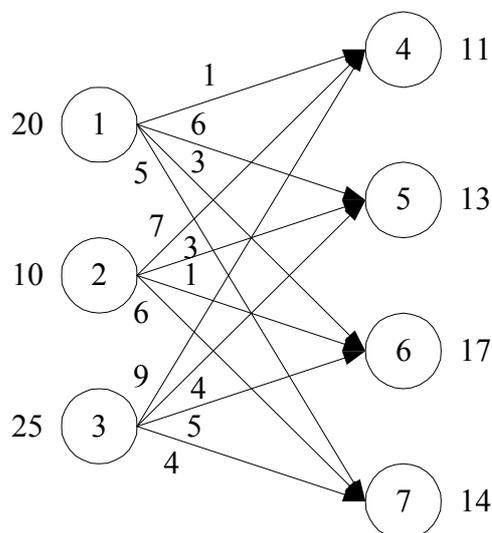
a) Mostre que a solução apresentada é óptima.

b) Existem soluções óptimas alternativas? Justifique e, em caso afirmativo, indique uma.

c) Obtenha uma solução óptima, considerando agora que o transporte entre O1 e D3 não é permitido.

---

11 Simplex para Transportes (2)

Considere o problema de transportes da figura seguinte.

a) Mostre que a solução $x_{14} = 11$, $x_{16} = 9$, $x_{25} = 2$, $x_{26} = 8$, $x_{35} = 11$, $x_{37} = 14$ é óptima e calcule o seu valor.

b) Suponha que a oferta do nodo 2 aumenta de 2 unidades e que a procura do nodo 4 também aumenta de 2 unidades. Compare o valor da solução óptima obtida com o valor da solução óptima da alínea anterior.

12 Produção (2)

a)

Uma determinada empresa pretende minimizar o custo de operação de três tipos de máquinas, mas satisfazendo a procura do produto fabricado.

Cada máquina tem uma determinada capacidade e um custo de operação. O custo de operação pode ser dividido em duas parcelas: o custo de utilização da máquina e um custo proporcional à quantidade por ela produzida. Na seguinte tabela é dada informação relativa às máquinas.

Tipo de máquina	Custo de utilização (€/dia)	Custo de produção (€/unidade)	Capacidade de produção (unidades)	Número de máquinas disponíveis
M1	200	1.50	40	8
M2	275	1.80	60	5
M3	325	1.90	85	3

A procura diária é de 750 unidades.

i) Formule um modelo que lhe permita responder à questão de quantas máquinas de cada tipo utilizar em cada dia de forma a minimizar o custo total.

ii) Obtenha uma solução óptima para este problema através da utilização de *software*.

b)

Considere a extensão do problema anterior para cinco dias. As procuras para esses dias é de 600, 800, 1000, 725 e 750. Considere que não há nenhum custo associado ao armazenamento.

Formule um modelo e obtenha uma solução óptima para este problema através da utilização de *software*.

13 Produção (3)

Uma fábrica produz sete produtos (1 a 7) em 5 tipos de máquinas (A a E). A fábrica dispõe de 4 máquinas do tipo A, 2 máquinas do tipo B, 3 máquinas do tipo C, e uma máquina de cada tipo D e E.

Cada produto contribui com um certo valor para o lucro (definido como € / preço de venda unitário − custo unitário das matérias-primas). Estes valores (em € / unidade) e os tempos de processamento (em horas) de cada produto em cada máquina são dados na tabela seguinte.

Produto	1	2	3	4	5	6	7
Contribuição para o lucro	10	6	8	4	11	9	3
A	0.5	0.7	–	–	0.3	0.2	0.5
B	0.1	0.2	–	0.3	–	0.6	–
C	0.2	–	0.8	–	–	–	0.6
D	0.05	0.03	–	0.07	0.1	–	0.08
E	–	–	0.01	–	0.05	–	0.05

No mês presente (Janeiro) e nos cinco meses seguintes, algumas máquinas não vão estar disponíveis, por se encontrarem em manutenção. A informação de quais as máquinas indisponíveis é dada na tabela seguinte.

Janeiro	1 A
Fevereiro	2 C
Março	1 E
Abril	1 B
Maio	1 A e 1 B
Junho	1 E e 1 C

Existem limitações impostas pelo Departamento de Marketing em relação a cada produto em cada mês. Estas são:

Produto	1	2	3	4	5	6	7
Janeiro	500	1000	300	300	800	200	100
Fevereiro	600	500	200	0	400	300	150
Março	300	600	0	0	500	400	100
Abril	200	300	400	500	200	0	100
Maio	0	100	500	100	1000	300	0
Junho	500	500	100	300	1100	500	60

É possível armazenar até 100 unidades de cada produto simultaneamente com um custo de 0.5€ por unidade por mês. Actualmente não existem unidades em stock, mas pretende-se que, no final de Junho, haja um stock de 50 unidades de cada produto.

A fábrica opera seis dias por semana com dois turnos diários de oito horas. Considere que cada mês tem 24 dias de trabalho.

a) Construa um modelo de PL que permita determinar o plano de produção da fábrica (quando e o quê produzir). (Sugere-se que considere primeiro apenas um dos meses).

b) Com auxílio de *software*, determine o plano de produção que maximiza o lucro.

14 Controlo de poluição do ar

A empresa Nori & Leets Co., uma das maiores produtoras de aço no seu continente, localizava-se na cidade Steeltown, onde era responsável pela maior parte dos empregos aí existentes. A cidade de Steeltown crescera e desenvolvera-se à sombra da empresa, que, na altura em que o problema que aqui se descreve ocorreu, tinha mais de 10 000 funcionários. Sendo assim, a atitude das pessoas sempre fora a de que o que era bom para a Nori & Leets Co. era também bom para Steeltown. No entanto, esta atitude mudara devido à poluição do ar provocada pela empresa. Tal poluição tornara-se visível na aparência da cidade e os seus habitantes temiam correr riscos de saúde.

Os três principais tipos de poluição do ar provocados pela empresa eram: partículas sólidas, óxidos de enxofre e hidrocarbonetos.

Depois de diversas reuniões, os directores da empresa decidiram seguir estratégias socialmente mais responsáveis, tendo acordado com representantes da população as seguintes reduções anuais das taxas de emissão dos poluentes do ar: material em partículas 60 milhões de libras, óxidos de enxofre 150 milhões de libras e hidrocarbonetos 125 milhões de libras (1 libra = 453.6 gramas).

Os directores da empresa encarregaram uma equipa de engenheiros de estudar de que forma essas reduções deveriam ser conseguidas da forma mais económica possível.

Essa equipa de engenheiros, numa primeira fase, identificou as duas principais fases do processo de fabrico de aço no que diz respeito à emissão de poluentes: a produção de ferro-gusa ("pig iron") e a transformação do ferro em aço. Ambas essas fases do processo produtivo são efectuadas em fornos (de diferentes tipos, aqui designados por A e B).

Em ambos os casos, a equipa de engenheiros decidiu que as formas mais eficazes de atingir os objectivos seriam: (1) aumentar a altura das chaminés, (2) utilizar filtros nas chaminés, (3) utilizar combustíveis de maior qualidade nos fornos.

Cada um desses métodos tem limites na sua utilização (por exemplo, a altura das chaminés não poderá, certamente, ser qualquer). Na tabela seguinte mostram-se os efeitos da utilização de cada um dos métodos (no limite máximo) na redução de emissão dos poluentes (em milhões de libras por ano).

Poluente	Aumentar altura chaminés		Filtros		Melhores combustíveis	
	Forno A	Forno B	Forno A	Forno B	Forno A	Forno B
Partículas sólidas	12	9	25	20	17	13
Óxidos de enxofre	35	42	18	31	56	49
Hidrocarbonatos	37	53	28	24	29	20

A equipa de engenheiros considerou que cada método poderia ser usado em qualquer fracção da sua capacidade máxima (entre 0 e o seu limite máximo) permitindo assim reduções desde 0 até aos valores apresentados na tabela anterior. Considerou ainda que essas fracções poderiam ser diferentes para os dois tipos de fornos e que, para cada tipo de forno, a redução obtida através de um método não seria substancialmente alterada pela utilização dos outros métodos.

Foi estimado o custo actual da utilização de cada método no seu limite máximo. Esse custo incluía custos de operação e manutenção adicionais, possíveis perdas de lucro devido à menor eficiência do processo produtivo e um custo de implementação. Os valores estimados (em milhões de dólares) são apresentados na tabela seguinte.

Método	Forno A	Forno B
Aumentar altura chaminés	8	10
Filtros	7	6
Melhores combustíveis	11	9

Foi ainda considerado que o custo de implementação de um método seria proporcional à fracção (em relação ao limite de utilização do método) utilizada.

A questão que se colocava então era que métodos (e em que fracções) utilizar para os fornos A e para os fornos B.

Não existindo nenhum elemento com uma sólida formação em IO na equipa referida, a tentativa de reduzir a poluição do ar revelou-se desastrosa e a empresa teve uma lenta agonia, até à falência. Hoje em dia, Steeltown é uma cidade fantasma.

a) Formule um modelo de PL que pudesse ter sido útil para evitar o triste final da Nori & Leets Co..

b) Com recurso a software, determine de que forma este caso poderia ter tido um final feliz.

15 Reciclagem de resíduos sólidos

A empresa Save-It Co. opera num centro de reciclagem que recolhe quatro tipos de resíduos sólidos (indexados de 1 a 4). Depois da recolha, os resíduos são tratados e misturados, dando origem a um produto vendável. (O tratamento e a mistura o são processos separados). Podem ser produzidas três variedades deste produto (aqui representadas por A, B e C), dependendo do tipo de resíduos utilizados e a sua quantidade. Embora haja alguma flexibilidade na mistura de cada variedade, especificações de qualidade têm de ser respeitadas, nomeadamente relativas às proporções (mínima e/ou máxima) dos resíduos (esta proporção é expressa em peso do resíduo relativamente ao peso total do produto). Essa informação é dada na tabela seguinte, juntamente com o custo do processo de mistura e o preço de venda.

Variedade	Especificação	Custo de mistura por Kg (€)	Preço de venda por Kg (€)
A	Resíduo 1: não mais de 30% do total Resíduo 2: não menos de 40% do total Resíduo 3: não mais de 50% do total Resíduo 4: Exactamente 20% do total	3.00	8.50
B	Resíduo 1: não mais de 50% do total Resíduo 2: não menos de 10% do total Resíduo 4: Exactamente 10% do total	2.50	7.00
C	Resíduo 1: não mais de 70% do total	2.00	5.50

Na tabela seguinte são dados os valores relativos à quantidade de recursos sólidos recolhidos por semana e ao custo do seu tratamento.

Resíduo	Quantidade recolhida (Kg)	Custo de tratamento por Kg (€)
1	3000	3.00
2	2000	6.00
3	4000	4.00
4	1000	5.00

Uma determinada ONG (com preocupações ambientais) disponibilizou 30 000€ por semana exclusivamente para o processo de tratamento dos resíduos sólidos com a condição de que, pelo menos, metade da quantidade recolhida de cada resíduo fosse tratada.

O que a gestão da Save-It pretende é determinar a quantidade de cada variedade a produzir por semana e a proporção exacta de cada resíduo a utilizar em cada variedade de forma a maximizar o lucro (valor das vendas – custo do processo de mistura).

Será que consegue ajudar a Save-It?

16 Line fitting

É conhecido que uma quantidade y depende de outra quantidade x. Foi recolhido um conjunto de valores de x e y que é dado na tabela seguinte.

x	0.0	0.5	1.0	1.5	1.9	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
y	1.0	0.9	0.7	1.5	2.0	2.4	3.2	2.0	2.7	3.5
x	5.0	5.5	6.0	6.6	7.0	7.6	8.5	9.0	10.0	
y	1.0	4.0	3.6	2.7	5.7	4.6	6.0	6.8	7.3	

a) Construa um modelo de PL que lhe permita estimar a "melhor" linha recta $y=bx+a$ para este conjunto de pontos com os seguintes dois objectivos:

i) minimizar a soma dos desvios absolutos de cada valor y em relação ao valor previsto pela relação linear;

ii) minimizar o desvio máximo de todos os valores observados y em relação ao valor previsto pela relação linear.

b) Com o recurso ao *software* que desejar, resolva os dois modelos de PL que definiu anteriormente, indicando claramente os valores de a e b para as duas situações.

c) Faça um esboço (ou utilize *software* para a construção do gráfico) dos pontos dados e das linhas rectas que definiu.

d) O método dos mínimos quadrados poderia ser aplicado através da resolução de um modelo de PL?

17 Restrições lógicas

Considere 7 variáveis de decisão binárias, x_j, $j=1,...,7$. Estabeleça, em termos de um modelo de Programação Inteira, as seguintes condições:

i) As variáveis 1 e 5 têm de ter o mesmo valor.

ii) Não é possível terem todas o valor 1.

iii) Pelo menos uma tem que ter o valor 1.

iv) A variável 1 não pode ter valor 1 se a variável 3 tiver valor 1.

v) A variável 4 só pode ter valor 1 se a variável 2 também tiver.

18 Sequenciamento

Considere o problema de determinar a sequência pela qual um determinado conjunto de n tarefas deve ser realizado numa determinada máquina. O tempo de processamento de cada tarefa é independente da ordem pela qual as tarefas são realizadas. No entanto, o tempo de preparação da máquina (*setup*) para a realização de cada tarefa j, depende de qual a tarefa i que foi realizada anteriormente, representando-se esse valor por t_{ij}, $i=1,...,n$, $j=1,...,n$, $i\neq j$. Dado o processo produtivo ser contínuo no final do processamento da última tarefa, é de novo iniciado o processamento da primeira.

Este problema pode ser formulado com um modelo de Programação Inteira "clássico". Qual? Identifique claramente a que corresponde cada parâmetro do problema dado no modelo "clássico".

19 Gestão de turnos

Em virtude do aumento do número de voos, uma determinada companhia aérea necessita de um maior número de colaboradores num determinado aeroporto. A questão que se coloca à gestão da companhia aérea é como garantir um bom nível de serviço aos seus clientes com o menor custo com recursos humanos possível.

Com base no horário dos voos foi efectuada uma análise do número mínimo de colaboradores necessários ao longo de um dia para o nível de serviço prestado ser satisfatório. Nas duas primeiras colunas da tabela abaixo é dada essa informação. Cada um dos colaboradores a contratar pode trabalhar em um dos cinco turnos com os horários dados na mesma tabela (por exemplo, o horário do turno 1 é das 06:00 às 14:00). Na última linha da tabela é dado o custo diário por colaborador.

Período	Número mínimo de colaboradores	Turno				
		1	2	3	4	5
06:00-10:00	7	X				
10:00-14:00	13	X	X			
14:00-18:00	9		X	X		
18:00-22:00	18			X	X	
22:00-02:00	7				X	X
02:00-06:00	3					X
Custo diário por colaborador (€)		170	160	175	180	195

a) Formule um modelo de Programação Inteira que permita à gestão da companhia áerea decidir quantos colaboradores devem ser contratados para cada um dos turnos.

b) Como incluiria no modelo que formulou na alínea a) o facto de se pagar um custo adicional de 100€ se o turno 2 for utilizado?

20 Campanha publicitária

Uma determinada instituição resolveu fazer uma campanha publicitária em diversos orgãos de comunicação social. Para tal, efectuou um estudo cujos resultados são sumariados na tabela a seguir apresentada.

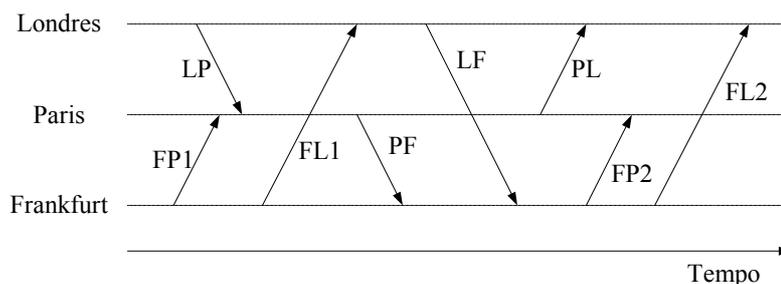
Orgão de comunicação social	Público atingido pelo anúncio (dividido em 6 grupos)	Custo do anúncio	Benefício devido ao anúncio
A	1, 2 e 4	3	12
B	2, 3 e 6	4	10
C	4, 5 e 6	3	14
D	5, 7 e 8	7	19
E	6, 8 e 9	5	16

Por exemplo, se for efectuado um anúncio no orgão de comunicação social A, os grupos 1,2 e 4 do público são atingidos. Pode supor que A corresponde ao seu jornal preferido e que os grupos 1, 2 e 4 correspondem, por exemplo, a público urbano da zona norte, público não urbano da zona norte e público não urbano da zona sul.

a) Formule um modelo de PI que corresponda a pretender-se minimizar o custo total, mas tendo em conta que a campanha publicitária deve chegar a todos os grupos.

b) Formule um modelo de PI que corresponda a pretender-se maximizar o benefício, mas tendo em conta que a campanha publicitária não deve ser vista em mais do que um orgão de comunicação social por cada grupo.

21 Escalonamento de tripulações aéreas

Uma das aplicações mais conhecidas (e rentáveis) da programação inteira é o escalonamento de tripulações aéreas. A título exemplificativo, considere que uma companhia aérea tem um conjunto de voos (diários) entre as cidades de Frankfurt, Paris e Londres, tal como representado na figura seguinte. O eixo horizontal corresponde ao tempo, o início de uma seta corresponde ao momento de partida de um voo e o final de uma seta corresponde ao momento de chegada. O código do voo é dado pela inicial da cidade de partida, pela inicial da cidade de chegada e por um número de ordem.

A companhia aérea tem diversas tripulações que têm ser alocadas aos voos de forma a que, no final do dia, regressem à cidade de onde partiram. Por exemplo, uma tripulação sediada em Paris poderá fazer o voo PF e o voo FP2. Designa-se por emparelhamento uma sequência de voos com início e final na mesma cidade.

Associado a cada emparelhamento está associado um custo que pode entrar em conta com factores como o tempo total de viagem, o tempo morto em aeroportos e o número de voos.

Na tabela seguinte são dados os emparelhamentos possíveis e o custo a eles associado.

Emparelhamento	Voos	Custo
1	FP1-PF	6
2	LP-PL	8
3	LP-PF-FL2	12
4	FL1-LF	7
5	PF-FP2	5
6	LF-FL2	8

Formule um modelo de PI que lhe permita resolver este problema. Considere que podem existir voos com mais de uma tripulação para se conseguir uma solução admissível – nesse caso, todos os elementos das tripulações, excepto de uma, viajam como passageiros.

22 Corte

Um problema muito frequente nas indústrias da madeira, vidro, papel, metalomecânica e têxtil, é o problema de corte. Basicamente, este problema consiste em cortar objectos de grandes dimensões em objectos mais pequenos de forma a minimizar o desperdício ou a minimizar o número de objectos grandes utilizados.

Considera-se aqui o caso de um problema de corte a uma dimensão. Existe um número de placas rectangulares de matéria-prima que se pretende cortar em peças rectangulares mais pequenas para as quais existem um conjunto de pedidos (pressupõe-se que o número de placas é suficientemente elevado para satisfazer todos os pedidos). A largura das placas e das peças é a mesma.

As placas têm três comprimentos diferentes: *100 cm*, *80 cm* e *55 cm*. Existem 150 pedidos de peças com *45 cm* de comprimento, 200 pedidos para peças de *30 cm* e 175 pedidos para peças de *18 cm*.

a) Formule e resolva o problema considerando que o objectivo é minimizar o número de placas utilizadas.

b) Formule e resolva o problema considerando que o objectivo é minimizar o desperdício.

23 Escolha de tecnologia de produção

Uma empresa dispõe de m diferentes formas de produzir um determinado produto. Associada a cada forma de produção, j, $j=1,...,m,$ estimou-se um custo fixo, f_j, um custo unitário c_j e um número máximo de unidades que podem ser produzidas, u_j. No mínimo têm de ser produzidas d unidades do produto em causa. No máximo, podem ser utilizados k formas diferentes de produção (de entre as m disponíveis). Formule um modelo de PI.

24 Localização

Considere o seguinte problema de localização com 5 depósitos e 6 clientes:

	Custo fixo	Clientes					
Depósitos	4	12	8	2	3	8	2
	3	13	4	6	5	0	0
	4	6	9	6	2	5	3
	4	0	1	0	1	10	4
	7	1	2	1	8	8	1

Os valores células das colunas relativas aos clientes dizem respeito ao custo (expresso nas mesmas unidades que o custo fixo) de satisfazer toda a procura de um cliente através do depósito da linha correspondente.

Nota: utilize *software* na resolução das questões que lhe são apresentadas.

a) Resolva a relaxação linear deste problema.

b) Obtenha a solução óptima do problema em que se considera que a procura dos clientes pode ser satisfeita a partir de diferentes depósitos. Qual o gap de integralidade relativo? Qual o gap de integralidade absoluto?

c) Qual o depósito a abrir, caso só se possa abrir um?

d) Considerando que pode ser aberto um qualquer número de depósitos, qual a segunda melhor solução?

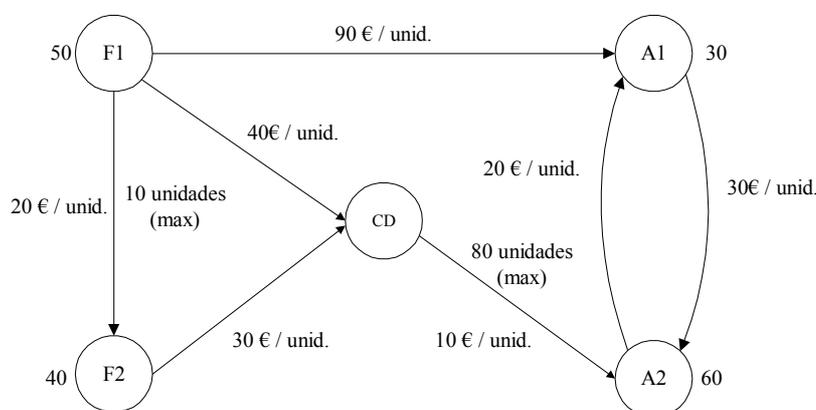
e) Considere que o cliente 1 não pode ser abastecido em mais de metade (da sua procura) por apenas um depósito. Qual a solução óptima?

---

25 Distribuição

Uma determinada empresa tem duas fábricas onde produz um determinado produto, um centro de distribuição e dois armazéns para armazenamento do referido produto.

Na figura que se segue representam-se esquematicamente os possíveis percursos para o produto desde que é produzido nas fábricas F1 e F2 até que é armazenado em A1 e A2.

Associado a cada transporte entre dois locais existe um custo proporcional ao número de unidades transportadas, como representado na figura. Junto a F1 e F2 apresentam-se a quantidade produzida em cada fábrica e junto a A1 e A2 representa-se a quantidade máxima que é possível armazenar em cada um dos armazéns. Para alguns dos transportes existe um limite de quantidade transportada que é indicado na figura.

A empresa referida pretende tomar uma decisão acerca das quantidades que deverão ser transportadas em cada percurso, de forma a garantir a minimização do custo total de transporte.

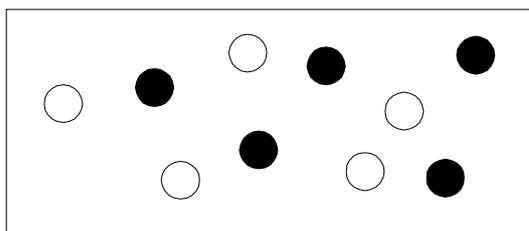
a) Através da utilização de *software*, determine a solução óptima para este problema.

b) Considere que associado a cada transporte existe um custo de 300 € (independentemente da quantidade transportada). Formule um modelo de PI para esta nova situação.

26 Objectos em movimento

Em vários contextos, pode ser desejável estimar a velocidade e a direcção de um conjunto de *p* objectos em movimento (por exemplo, aviões, mísseis, manchas de crude no mar).

Uma forma plausível de o fazer é tirar duas fotografias em diferentes momentos, como representado na figura seguinte. A posição dos cinco objectos no primeiro momento é representada por um círculo branco. Represente por (x_{1i},y_{1i}) as coordenadas do ponto *i* nesse momento, $i=1,...,p$.

Os cincos pontos identificados no segundo momento são representados por um círculo negro. Represente por (x_{2i},y_{2i}) as coordenadas do ponto *i* nesse momento, $i=1,...,p$.

Para estimar a velocidade e a direcção de cada objecto torna-se necessário associar cada ponto no primeiro momento a um ponto no segundo.

Considerando que as duas fotografias são tiradas com um intervalo de tempo suficientemente pequeno, formule um modelo de afectação que lhe permita obter um conjunto de associações plausíveis.

27 Gestão de projectos

Uma determinada empresa de construção civil vai iniciar a construção de um edifício. Com vista a um bom planeamento desse projecto, o responsável dividiu o projecto em actividades e estimou a duração de cada uma delas. Naturalmente, certas actividades só podem ser iniciadas depois de outras estarem concluídas.

Na tabela seguinte são dadas as actividades consideradas, a sua duração (em dias) e as relações de precedência entre as mesmas (por exemplo, para se poder iniciar a actividade 3, as actividades 1 e 2 têm de estar concluídas).

	Actividade	Duração	Actividades predecessoras
1	Fundações	15	-
2	Medições	5	-
3	Placas	4	1,2
4	Estrutura	3	3
5	Telhado	7	4
6	Electricidade	10	4
7	Aquecimento e ar condicionado	13	2,4
8	Pintura	18	4,6,7
9	Acabamentos	20	5,8

Com vista a uma gestão de recursos (materiais, humanos e subcontratacção de outras empresas), a empresa em causa pretende determinar a data de início de cada actividade de forma ao projecto terminar o mais cedo possível.

a) Apresente um modelo para este problema com base na seguinte definição de variáveis de decisão: x_i – dia de início da actividade i. Obtenha a duração mínima do projecto.

b) Apresente um modelo de fluxos em rede, confirmando a duração mínima do projecto que obteve na alínea anterior.

28 Armazenamento

Pretendem-se guardar 100 objectos num determinado armazém automático com 20 locais de armazenamento. Cada um dos objectos tem um volume de c_i metros cúbicos *(i=1,...,100)*. Cada um dos locais de armazenamento tem uma capacidade de b_j metros cúbicos (*j=1,...,20*) e fica a uma distância de d_j metros *(j=1,...,20)* do local onde inicialmente se encontram os objectos. O veículo que efectua o transporte do local onde inicialmente se encontram os objectos para um dos locais de armazenamento apenas pode transportar um objecto de cada vez.

a) Apresente um modelo de Programação Inteira que permita a minimização da distância total percorrida com o armazenamento de todos os objectos.

b) A que modelo geral de PI corresponde o modelo que formulou na alínea anterior?

29 Missões espaciais

A agência espacial norte-americana (NASA) utiliza um modelo de Programação Inteira para apoiar as tomadas de decisão relativas à selecção de potenciais missões. Considere a seguinte versão (simplificada) do problema com que se debate a NASA. Está em causa um horizonte temporal de 12 anos (3 períodos de 4 anos) e um conjunto de 6 potenciais missões. Se uma missão for seleccionada, tem de ser totalmente financiada em cada um dos períodos.

Na tabela seguinte apresentam-se as missões em causa, o financiamento (em biliões de dólares) requerido por cada uma, em cada período, e o valor que a NASA atribuiu a cada missão (calculada com base nos ganhos científicos, nos benefícios para a vida na terra, etc...).

Missão	Período			Valor
	2004-08	2008-12	2012-16	
1 – Órbitra de Urano 2012	8	10	1	40
2 – Órbitra de Urano 2016	1	8	10	25
3 – Exploração de Mercúrio	2	4	6	15
4 – SETI	1	1	3	8
5 – Tecnologia médica	2	1	1	9
6 – Exploração de Io	1	3	1	10

O orçamento disponível é de 10, 14 e 15 biliões de dólares no primeiro, segundo e terceiro períodos, respectivamente. Das missões 1 e 2 apenas uma pode ser executada. A missão 3 depende da 6, logo só poderá ser seleccionada se a 6 também for.

a) Apresente um modelo de Programação Inteira que permita a maximização do valor do conjunto das missões seleccionadas.

b) Considere apenas o primeiro período (2004-08) e que não existem dependências entre as missões (nomeadamente entre as missões 1 e 2 e as missões 3 e 6). Indique, justificando sucintamente, qual o modelo geral de PI que permitiria abordar este problema.

30 Método de Partição e Avaliação (1)

Considere o seguinte problema:

$$Max\ z=4x_1-2x_2+7x_3-4x_4$$
$$s.\ a:$$
$$x_1+5x_3\leq 10$$
$$x_1+x_2-x_3\leq 1$$
$$6x_1-5x_2\leq 0$$
$$-x_1+2x_3-2x_4\leq 3$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0\ e\ inteiros.$$

Através da utilização de *software* para a resolução dos problemas de PL dos nodos da árvore de pesquisa do Método de Partição e Avaliação, represente a árvore de pesquisa para as estratégias primeiro em profundidade e primeiro em largura. Seleccione sempre para variável de partição aquela que tiver uma parte fraccionária mais próxima de 0.5.

31 Método de Partição e Avaliação (2)

Considere o seguinte problema de Programação Inteira:

$$Max\,z=2x_1+2x_2$$
$$S.a:$$
$$7x_1+3x_2\leq 21$$
$$3x_1+7x_1\leq 21$$
$$x_1,x_2\geq 0\,e\,inteiros.$$

A solução óptima da relaxação linear é $x_1=2.1$, $x_2=2.1$ com valor $z=8.4$.

Na resolução do pelo método de partição e avaliação foram criados dois nodos por inserção das restrições de partição $x_1\leq 2$ e $x_1\geq 3$. A solução óptima do primeiro é $x_1=2$, $x_2=2.1$ com valor $z=8.3$. A solução óptima do segundo é $x_1=6$, $x_2=0$ com valor $z=6$.

a) Apresente a árvore de pesquisa com a informação que tem disponível e com a representação dos nodos que achar adequados criar.

b) Apresente o intervalo no qual está contido o valor de uma solução óptima inteira.

32 Método de Partição e Avaliação (3)

Considere o seguinte problema de Programação Inteira:

$Max\, z = 2x_1 + 2x_2$

$S.a:$

$4x_1 + 3x_2 \leq 12$

$3x_1 + 4x_1 \leq 12$

$x_1 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0 e int eiros$

Obtenha a solução óptima inteira, utilizando o método de partição e avaliação, utilizando como primeira variável de partição a variável de decisão x_1. Para resolver os subproblemas utilize a representação gráfica.

33 Planos de corte de Gomory

Considere o seguinte quadro óptimo simplex relativo à relaxação linear de um problema de Programação Inteira.

	x_1	x_2	f_1	f_2	
x_2	0	1	2/3	–1/3	46/3
x_1	1	0	–1/3	2/3	34/3
z	0	0	2/3	2/3	160/3

a) Indique um plano de corte de Gomory e insira-o no quadro Simplex apresentado (não necessita de fazer nenhuma iteração).

b) Como prosseguiria, utilizando o método de planos de corte de Gomory, para obter uma solução óptima inteira?

34 AT&T: Selecção de Localizações para Centros de Telemarketing

a)

A Empresa de Telecomunicações

Em 1986, a AT&T (grande empresa de telecomunicações americana) acordou para uma dura realidade: tinha uma posição no mercado muito diferente da posição de monopólio que detivera durante os anos setenta.

Em 1984, as alterações nas leis de regulação de mercado permitiram a entrada de novas empresas no mercado das chamadas telefónicas de longa distância. A AT&T foi forçada à maior e mais publicitada venda de acções da história. A consequência destas ocorrências foi que em meados dos anos oitenta, a empresa detinha menos de 50% das vendas de chamadas de longa distância e de equipamentos de telecomunicações, onde antes detivera o monopólio.

Entretanto, os seus competidores tinham feito grandes investimentos em redes de comunicações novas. Como consequência, a sua vantagem tecnológica tinha vindo a diminuir e parecia prestes a desaparecer. Em áreas em que antes tinha grandes margens de lucro, a AT&T encontrou-se numa feroz luta de preços. As áreas tradicionais de negócio (telefones e chamadas telefónicas) estavam a tornar-se negócios de pequena margem de lucro, onde o preço rapidamente se tornaria a principal razão de escolha para os clientes.

Em resposta a esta mudança dramática, a AT&T desenvolveu uma nova estratégia focada em identificar oportunidades para novos produtos de comunicações, explorando assim a sua maior capacidade, em relação aos competidores, para lidar com sistemas de comunicações complexos.

Um sector identificado foi o da indústria de *telemarketing*, com um crescimento esperado até à década de noventa de 10 a 15%.

A Indústria de *Telemarketing*

O *telemarketing* utiliza as tecnologias de telecomunicações e a gestão de sistemas de informação para implementar um plano de *marketing*.

Nos Estados Unidos da América, em 1986, existiam 140000 empresas de telemarketing (um crescimento de 87,5 vezes em relação a 1980!). Estas empresas empregavam cerca de dois milhões de pessoas, sendo responsáveis por vendas no valor de 118 biliões de dólares em bens e serviços (20 biliões dos quais em produtos e serviços relacionados com telecomunicações). A estimativa era de que no ano 2000, o número de pessoas crescesse para oito milhões e as vendas para 500 biliões de dólares.

O *telemarketing* pode ser dividido em quatro áreas (o que não interessa nada para o caso mas sempre fica a cultura geral :)): processamento de encomendas, apoio a clientes, suporte a vendas e gestão da contabilidade.

Sistema de *Telemarketing*

Um sistema de *telemarketing* inclui um ou mais “centros”, onde a gestão da informação e o sistema de comunicações se encontram. Num “centro”, pessoal habilitado interage com os clientes de uma região específica através de telefonemas, processando pedidos (como por exemplo, de produtos de venda por catálogo) e dando informações com base nos sistemas de informação que tem ao seu dispor (por exemplo, sobre o prazo de garantia de um produto).

Decisões críticas no planeamento de um sistema de *telemarketing* incluem a decisão de quantos centros usar, a sua localização e para qual dos centros devem ser encaminhados os telefonemas dos clientes (de áreas diferentes).

Os centros podem ter diversos tamanhos, de acordo com o espaço físico que ocupam e com o número de pessoas empregadas. O dimensionamento de um centro deve ser efectuado com base numa previsão do volume de telefonemas a serem recebidos, o qual, por sua vez, depende das regiões específicas que serão servidas pelo centro em questão. É usual empresas que fornecem o serviço 24 horas por dia terem vários centros para poderem encaminhar os telefonemas dos clientes para uma localização onde é dia (não nos esqueçamos que estamos a falar dos Estados Unidos da América em que a diferença de fusos horários de uma costa à outra é, para aí :), de oito horas), evitando assim os custos com pessoal de um centro específico estar aberto 24 horas.

O Problema de Selecção de Centros de *Telemarketing*

O principal factor de decisão para a localização de centros era o custo das comunicações. Quando o serviço número grátis (800) foi introduzido em 1967, a AT&T efectuou um estudo sobre as localizações de centros. Para a maior parte dos casos, o custo do serviço número grátis determinava a melhor localização, já que o custo dos recursos humanos e do espaço físico eram muito baixos quando comparados com os custos dos telefonemas de longa distância. (Nota: quando uma empresa tem um serviço de número grátis, como, por exemplo, a EDP para leitura dos contadores da electricidade, esse número é grátis para o cliente, mas a empresa tem de pagar um valor acordado previamente com a operadora de telecomunicações. Sendo os custos dos telefonemas de longa distância elevados, imagine-se o que seria uma empresa de *telemarketing* a operar em Nova York, ter de pagar milhares de telefonemas de clientes de Los Angeles à operadora de telecomunicações...).

Esta estrutura de custos favoreceu as cidades do centro dos Estados Unidos, onde as maiores cadeias de hotéis, companhias aéreas e empresas de aluguer de automóveis localizaram os seus centros de *telemarketing*.

Hoje em dia, as coisas são mais complexas. A principal mudança é que os custos de comunicações baixaram consistentemente, enquanto que os custos com o pessoal aumentaram, o que implica uma nova abordagem ao problema de selecção de centros de *telemarketing*.

O reconhecimento de que há vários factores além do custo dos telefonemas levou a um maior conhecimento da complexidade do problema de localização de centros de *Telemarketing*. Para diferentes regiões, o custo de compra/aluguer, os impostos, os custos de pessoal e outros, são muito diferentes. Como consequência, nem sempre é evidente que se deva localizar um centro na região que este servirá: a distância electrónica é um factor importante.

A percepção geral era de que o custo de compra/aluguer das instalações físicas e/ou o custo das chamadas era(m) o principal(is) factor(es) para a decisão das localizações existentes, mas investigações mais aprofundadas indicaram que as considerações da gestão da empresa eram, de facto, o principal factor. Estas decisões da gestão eram, em geral, decisões emocionais, como localizar um centro na cidade onde estavam localizados os principais escritórios da empresa, ou na cidade preferida de um gestor sénior.

Questões

Que decisões têm de ser tomadas na concepção de um sistema de telemarketing?

Sugira um modelo matemático para o problema da localização de centros de telemarketing.

Que informação é necessária para o modelo que construiu?

b)

O Problema de Selecção de Centros de Telemarketing da McMartin

A McMartin é uma empresa de vendas por catálogo que se depara com o problema de onde localizar os seus centros de telemarketing. Para tal contactou a AT&T no sentido de decidir a melhor localização para os mesmos.

Depois de alguma análise conjunta entre os especialistas da AT&T e da McMartin, foram decididas 10 potenciais localizações. Os custos fixos anuais de operação de cada potencial localização, bem como o ordenado horário a pagar a cada trabalhador, em cada uma dessas dez potencias localizações são dados na Tabela 1 do ficheiro de dados.

Uma análise ao histórico de telefonemas dos clientes da McMartin revelou que, em média, um telefonema demora seis minutos com um minuto extra para processamento, por parte do operador, do requerido pelo cliente (por exemplo, uma encomenda). Ainda de acordo com o histórico de telefonemas, foi estimado o número de telefonemas a serem recebidos por ano com origem em cada uma das 17 áreas onde a empresa opera. Apresentam-se esses dados na Tabela 2 do ficheiro de dados.

O tempo de ocupação médio de um trabalhador pode ser estimado em 87% e os seus extra salariais em 20% do ordenado horário base (Tabela 1 do ficheiro de dados). Para a análise a efectuar, os impostos podem ser ignorados.

Por fim, os especialistas da empresa AT&T forneceram os custos horários para telefonemas entre cada área (de clientes) e cada localização possível de um centro de *telemarketing*. Esses valores são dados na Tabela 3 do ficheiro de dados.

Questões

Se a gestão da McMartin decidir apenas um centro de telemarketing, qual deve ser a sua localização? E se decidir abrir dois centros de telemarketing?

Faz sentido resolver o problema como sendo de Programação Linear em vez de Programação Inteira Mista?

Bibliografia

R. Ahuja, T. Magnanti, J. Orlin, "Network Flows", Prentice-Hall, 1993.
H. Eiselt, C. Sandblom, "Integer Programming and Network Flows", Springer, 2000.
F. S. Hillier and G. J. Lieberman, "Introduction to Operations Research", Mc-GrawHill, 2001.
P. Jensen, J. Bard "Operations Research: Models and Methods", John Wiley and Sons, 2003.
http://www.solver.com/
H. P. Williams, "Model Building in Mathematical Programming", John Wiley and Sons, 1999.

O caso de estudo é uma adaptação de *"AT&T Telemarketing Site Location", Wiley-INFORMS Teaching Cases* e é descrito em *Anthony J. Brigandi, Dennis R. Dargon, Michael J. Sheehan, Thomas Spencer III, "AT&T's Telemarketing Site Selection System Offers Customer Support", Interfaces Volume 20, Number 1, Jan/Feb 1990 pp:83-96,* disponível em http://www.interfaces.smeal.psu.edu.